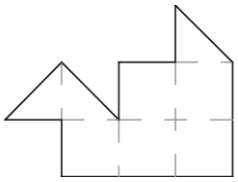
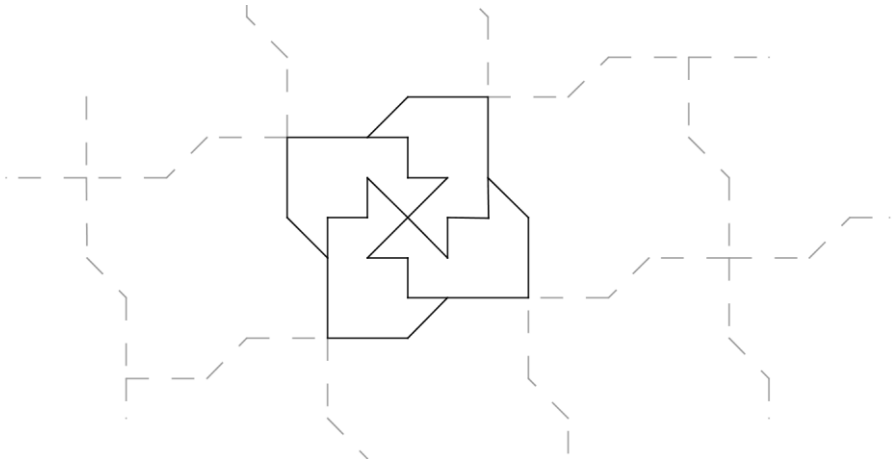
8-й класс

1. Можно ли замостить плоскость фигурками, изображенными на рисунке?



Решение.



2. Коля случайно стер с доски пример на вычитание. Сам пример он не запомнил, но обратил внимание на то, что числа были целые и сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности была равна то ли 2011, то ли 2012. Можно ли определить, чему было равно уменьшаемое в стертом примере? Ответ поясните.

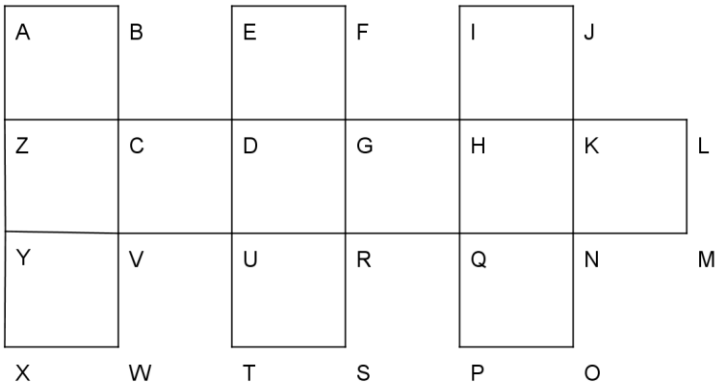
Решение. 1006.
Поскольку сумма вычитаемого и разности равна уменьшаемому, то сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна удвоенному уменьшаемому. Числа были целые, следовательно, их сумма могла быть равна только 2012. И уменьшаемое равно половине данной суммы.

3. Туристы обсуждали один из городов, где им предстояло побывать.
– В этом городе более ста фонтанов, – предположил первый.
– Нет, фонтанов в городе менее ста, – сказал второй.

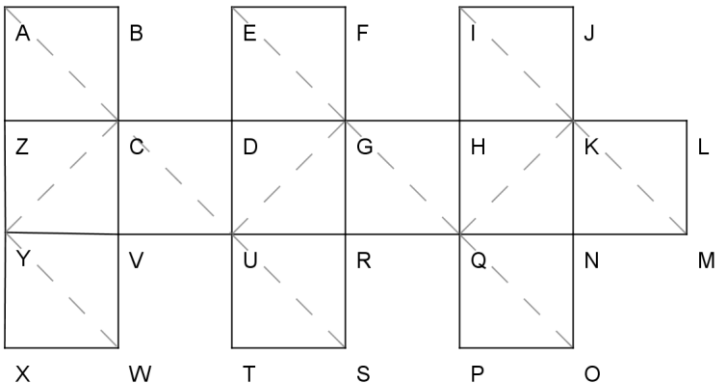
– Два фонтана в этом городе точно есть, – высказал предположение третий.
Оказалось, что лишь один из этих туристов прав. Сколько фонтанов могло быть в городе?

Решение. Либо ровно 100 фонтанов, либо один, либо ни одного.
Если правду сказал первый турист, то и третий окажется прав, что противоречит условию задачи. Если правду сказал только второй, то фонтанов может быть либо 0, либо 1 (только в этом случае третий не прав). Если правду сказал только третий, то фонтанов может быть ровно 100 (только в этом случае первый и третий одновременно ошибаются).

4. Вася на бумаге в клеточку нарисовал фигуру, показанную на рисунке. И обнаружил, что эта фигура является разверткой куба. Чему равна площадь грани этого куба? Проведите линии сгиба для его сборки. Укажите, какая буква с какой совпадет при сборке куба.



Решение.
Площадь грани равна двум клеточкам (общую площадь поверхности куба поделили на количество граней). Линии сгиба показаны на рисунке. При сборке куба совпадут: (A, E, I), (B, D), (F, H), (J, L, Z), (M, Y), (N, X), (O, S, W), (P, R), (T, V).



5. Подряд в строчку записано 2011 цифр так, что любое число, образованное двумя соседними цифрами, делится на 19 или на 23. Первая цифра 4. Какая последняя? Ответ поясните.

   Решение. Последняя цифра будет 9.
   Двузначные числа, делящиеся на 19: 19, 38, 57, 76, 95. Двузначные числа, делящиеся на 23: 23, 46, 69, 92. Начало цепочки следующее: 469. После 9 может быть либо 2, либо 5. Если будет 2, то цепочка оборвется на шестом шаге: 469238. Если будет 5, то на седьмом шаге снова появляется цифра 9: 4695769, и цепочка может продолжаться. Через три цифры после 9 либо вновь появляется цифра 9, либо цепочка обрывается. Таким образом цифра 9 стоит в цепочке из 2011 цифр на 3-ем, 7-ом, 11-ом, …, 2007-ом местах. Чтобы цепочка оказалась нужной длины, на 2008-ом месте должна стоять цифра 5 и на последнем 2011-ом месте окажется цифра 9.

6. Точки сторон правильного треугольника раскрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

Решение.

Предположим, что нет прямоугольного треугольника с вершинами одного цвета. Разделим каждую сторону правильного треугольника двумя точками на три равные части. Эти точки образуют правильный шестиугольник. Если две его противоположные вершины одного цвета, то все остальные вершины будут второго цвета, а значит, есть прямоугольный треугольник с вершинами второго цвета. Следовательно, противоположные вершины шестиугольника

разноцветные. Поэтому найдутся две соседние разноцветные вершины; противоположные им вершины тоже разноцветные. Одна из этих пар разноцветных вершин лежит на стороне треугольника. Точки этой стороны, отличные от вершин шестиугольника не могут быть ни первого, ни второго цвета. Получено противоречие.

7.